**ӘОЖ 51-7**

# ОҚУШЫЛАРДЫ МАТЕМАТИКА САБАҒЫНДА ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН ШЕШУГЕ ҮЙРЕТЕТІН ӘДІСТЕР

**Есламбек Нұрдәулет Женісұлы**
nurdaulet.yeslambek@mail.ru
7М01503 – «Математика. Білім беру үдерісін басқару»
білім беру бағдарламасының 2 курс магистранты
Ғылыми жетекшісі: **Шаждекеева Н.К.**
ф.-м.ғ.к., профессор
Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ, Қазақстан Республикасы

**Аңдатпа**

Мақала математикалық курс шеңберіндегі Тригонометриялық теңдеулер мен теңдеулер жүйесін шешуге оқушыларды оқыту әдістерін зерттеуге арналған. Автор күрделі математикалық есептерді шешуде оқушылардың дағдыларын дамытуға бағытталған тиімді тәсілдер мен педагогикалық стратегияларды қарастырады. Мақалада практикалық тапсырмалардың әртүрлі түрлерін, шешім алгоритмдерін қолдануды, сондай-ақ заманауи технологияларды оқу процесіне біріктіруді қамтитын әдістер егжей-тегжейлі сипатталған. Тапсырмалардың күрделілігінің әртүрлі деңгейлеріне және оларды жүйелеу әдістеріне назар аударылады, бұл студенттердің тақырыпты түсінуін жақсартуға көмектеседі. Қорытындылай келе, жеке көзқарасты маңыздылығын және тригонометрия материалдарын игерудегі студенттердің үлгерімін үнемі бақылаудың маңыздылығын атап өтеді.

**Негізгі сөздер:** математика, тригонометрия, теңдеулер, шешу әдістері, Математикалық есептер, теңдеу жүйелері, функция

Қазіргі математика сабағында оқушыларды параметрлері бар тригонометриялық теңдеулер мен теңдеулер жүйесін шешуге үйрету — оқушылардың аналитикалық ойлау қабілеттерін дамытуға және олардың математикалық дағдыларын қалыптастыруға маңызды мүмкіндік береді. Тригонометриялық теңдеулер мен теңдеулер жүйесін шешудің бірнеше әдістері мен тәсілдері бар. Осы әдістер мен тәсілдерді жүйелеу оқушыларға тапсырмаларды тиімді шешуге, олардың математикалық ойлау қабілетін жетілдіруге мүмкіндік береді. Төменде осы әдістер мен тәсілдердің толық жүйесі ұсынылады.

## 1. Тригонометриялық теңдеулерді шешу әдістері

1.1. Тригонометриялық сәйкестендіруді қолдану

Тригонометриялық теңдеулерді шешуде ең көп қолданылатын әдістердің бірі — тригонометриялық сәйкестендіруді пайдалану. Мұнда функцияларды белгілі бір түрлендіру арқылы теңдеулерді жеңілдетуге болады. Мысалы:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

Бұл тәсілді пайдалану арқылы теңдеулердің түрін қарапайым етіп, шешуді жеңілдетуге болады.

Мысал: $\cos x + \sin x = 0$ теңдеуін шешу үшін $\cos^2 x + \sin 2 x = 1$ формуласын қолданамыз.

1.2. Функцияларды қосу немесе азайту әдісі қосындысы немесе айырмасы түріндегі теңдеулерді шешкенде, сол функцияларды sin және cos функцияларының көмегімен қосу немесе азайту әдісімен шешуге болады. Бұл әдіс көмегімен күрделі теңдеулерді қарапайым түрде шешуге мүмкіндік береді.

Мысал: $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ теңдеуін түрлендіру арқылы $\sqrt{2}\cos(x - \pi/4) = \sqrt{2}$

1.3. Периодты қасиеттерін қолдану.Тригонометриялық функциялардың периодтық қасиеттерін қолдану арқылы теңдеулерді шешуге болады. Мысалы, sin x және cos x функцияларының периодтары $2\pi$-ке тең екенін пайдаланып, шешімді табуға болады.

1.4. Графикалық әдіс. Тригонометриялық теңдеулерді шешу үшін графикалық әдісті қолдану өте тиімді. Бұл әдіс теңдеудің графигін салып, графиктің қиылысқан нүктелерін табуға негізделеді. Мысалы, sin x мен cos x функцияларының графиктерін салыстырып, олардың қиылысу нүктелерін табу.

1.5. Қосымша теңдеулерді қолдану. Тригонометриялық теңдеулердің шешімін табу үшін кейбір қосымша теңдеулер мен әдістер қолданылуы мүмкін, мысалы, бұрыштардың қосындысын немесе айырымын пайдалану, немесе белгілі бір үшбұрыштың қасиеттерін қолдану.

**2. Параметрлері бар теңдеулер мен теңдеулер жүйесін шешу әдістері**

2.1. Параметрдің мәніне байланысты шешімді бөлу

Мысал: $\sin x = a/b$ және a, b параметрлері әртүрлі мәндер қабылдай алады.

2.2. Графикалық әдіс. Параметрлері бар теңдеулерді шешу үшін графикалық әдіс өте пайдалы. Әр параметр үшін теңдеудің графигін салып, олардың қиылысу нүктелерін табу арқылы жүйенің шешімін анықтауға болады.

2.3. Алгебралық түрлендіру әдісі. Параметрлері бар теңдеулер жүйесін шешу үшін алгебралық түрлендіру әдісін қолдануға болады. Бұл әдіс теңдеулердің параметрлері бар мүшелерін түрлендіру арқылы шешімдер табуға мүмкіндік береді.

2.4. Жүйе теңдеулерін шешудің негізгі әдістері. Теңдеулер жүйесін шешудің бірнеше негізгі әдістері бар:

- Орнына қою әдісі: Бұл әдіс бойынша бір теңдеуден алынған айнымалыны екінші теңдеуге қою арқылы жүйенің шешімін табуға болады.
- Қосымша әдіс (қосу немесе азайту әдісі): Қосымша әдіс теңдеулерді біріктіріп, бір айнымалыны жоюға көмектеседі.
- Гаусс әдісі: Жүйені матрицалық түрде шешу үшін Гаусс әдісін қолдануға болады.

2.5. Параметрлердің өзгерісін талдау. Параметрлердің өзгеруін қарастыру арқылы теңдеулердің шешімдерін анықтау. Параметрдің өзгеруіне байланысты теңдеудің шешімдері қалай өзгеретінін түсіну үшін талдау жүргізу.

**3. Шешімдер табуды жақсарту үшін қолданылатын әдістер**

3.1. Қайталау мен тәжірибені қолдану

Тригонометриялық теңдеулер мен теңдеулер жүйесін шешу үшін оқушыларға түрлі жаттығулар мен тапсырмаларды қайталатып отыру маңызды. Тәжірибе арқылы оқушылар өздерінің қателіктерін тауып, шешімдерді тез табуға үйренеді.

3.2. Жеке жұмыс және топтық талқылау

Топтық жұмыс барысында оқушылар бір-біріне көмектесіп, шешімдердің дұрыстығын талқылайды. Сонымен қатар, жеке тапсырмалар арқылы оқушылардың әртүрлі әдістерді қолдана алу қабілеттері дамиды.

3.3. Математикалық бағдарламалар мен құралдарды қолдану

Оқушыларға математикалық бағдарламалар (мысалы, GeoGebra, Wolfram Alpha) қолдану арқылы шешімдерді визуализациялау және тексеру мүмкіндігін беру. Бұл әдіс оқушылардың математикалық түсініктерін тереңдетуге көмектеседі.

**1. Бірінші ретті функциясы және параметрі бар теңдеулер.**

F(g(x).a)=0 түріндегі теңдеулер, мұндағы g(x). - тригонометриялық функцияның кейбір сызықтық функциясы параметрі бар сызықтық теңдеулерге ұқсас шешіледі.

Параметрмен сызықтық теңдеулерді қалай шешуге болады, мысалдар арқылы қарап көрейік.

1-мысал. Теңдеуді шешейік. $\dfrac{1-\cos x}{\sin\dfrac{x}{2}} = a$

ММЖ: $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0.\dfrac{x}{2} \neq \pi\kappa.x \neq 2\pi\kappa$

$$\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} = 2\sin\frac{x}{2} = a$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^k \arcsin\frac{x}{2} + \pi\kappa$$

$$x = (-1)^k\, 2\arcsin\frac{a}{2} + 2\pi\kappa$$

$$(-1)^k\, 2\arcsin\frac{a}{2} \neq 0$$

$$\arcsin\frac{a}{2} \neq 0$$

$$\frac{a}{2} \neq 0.a \neq 0$$

$$-1 \le \frac{a}{2} \le 1.-2 \le a \le 2$$

Жауабы: $a < -2.a = 0.a > 2$ болғанда шешімі жоқ

$-2 \le a < 0.0 < a \le 2$ болғанда $x = 2\arcsin\dfrac{a}{2} + 4\pi\kappa.x = \pi - 2\arcsin\dfrac{a}{2} + 4\pi\kappa$

**2. Квадраттық Функциясы мен параметрі бар теңдеулер.**

F(g(x).a)=0 түріндегі теңдеулер, мұндағы g(x)- тригонометриялық функцияның кейбір квадраттық функциясы параметрі бар квадраттық теңдеулерге ұқсас шешіледі.

2-мысал. Теңдеуді шешейік. $\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x - (a+3) = 0$

$$t^2-(a+2)t-(a+3)=0$$

$t=\cos^2 x. 0\le t\le 1$ $\quad D=(a+2)^2+4(a+3)=(a+4)^2$

$$t=\frac{(a+2)\pm(a+4)}{2}. t=-1. t=a+3$$

$t_1=-1<0$ түбір ауыстыру анықтамасына сай келмейді.Екінші түбір $t=a+3$ $0\le a+3\le 1$

$$-3\le a\le -2$$

$$\cos^2 x=a+3$$

$$\frac{1+\cos 2x}{2}=a+3$$

$$\cos 2x=2a+5$$

$$2x=\pm\arccos(2a+5)+2\pi\kappa$$

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos(2a+5)+\pi\kappa$$

Жауабы:a<-3. a>-2 шешімі жоқ, $-3\le a\le -2$ болса, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(2a+5)+\pi\kappa$

3. Параметрлері бар басқа теңдеулер. Параметрлері бар басқа тригонометриялық теңдеулерді шешуде тригонометриялық түрлендірулер, айнымалыларды ауыстыру, бір теңдеуден теңдеулер жүйесіне (жиынтығына) өту және т. б. қолданылады.

3-мысал. Теңдеуді шешейік. $(a+1)\sin x+(a-1)\cos x=2a$

Көмекші бұрышты енгізейік. $p=\sqrt{(a+1)^2+(a-1)^2}=\sqrt{a^2+2a+1+a^2-2a+1}=\sqrt{2(a^2+1)}$

$$\frac{a+1}{\sqrt{2(a^2+1)}}\sin x+\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}}\cos x=\frac{2a}{\sqrt{2(a^2+1)}}$$

$$\sin\gamma=\frac{a+1}{\sqrt{2(a^2+1)}}.\cos\gamma=\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}}$$

$$\sin\gamma\sin x+\cos\gamma\cos x=a\sqrt{\frac{2}{a^2+1}}$$

$$\cos(x-\gamma)=a\sqrt{\frac{2}{a^2+1}}$$

$$x-\gamma=\pm\arccos(a\sqrt{\frac{2}{a^2+1}})+2\pi\kappa$$

$$x=\arccos\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}}\pm\arccos(a\sqrt{\frac{2}{a^2+1}})+2\pi\kappa$$

Жауабы: $|a|>1$ шешімі жоқ, $|a|\le 1$ болса, $x=\arccos\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}}\pm\arccos(a\sqrt{\frac{2}{a^2+1}}+2\pi\kappa$

**ҰБТ –де кездесетін параметрлік тригонометриялық теңдеулердің шешіміне тоқталаайық:**

Теңдеуді шешіңдер: 1) sin3x=asinx

sin3x=3sinx-4sin$^3$x

3sinx-4sin$^3$x=asinx

$$-1 \le \frac{a-1}{2} \le 1$$
$$-2 \le a-1 \le 2$$

$$-1 \le a \le 3$$

Жауабы: a<-1. a>3: $x = \pi\kappa$

$$-1 \le a \le 3 : \begin{cases} x = \pi\kappa \\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2} + \pi\kappa \end{cases}$$

2) $\sin^2 x$-5cosx+a=0

$$(1-\cos^2 x) - 5\cos x + a = 0$$
$$\cos^2 x + 5\cos x - (a+1) = 0$$
$$t = \cos x \quad -1 \le x \le 1$$
$$t^2 + 5t - (a+1) = 0$$

$f(t) = t^2 + 5t - (a+1)$ -бұл тармақтары жоғары қарайтын парабола,төбесі $t_0 = -2.5$

$$f(t_0) = t_0^2 + 5t_0 - (a+1) = 6.25 - 12.5 - (a+1) - -6.25 - (a+1)$$

а параметріне байланысты парабола -2,5 бірлік жылжиды. $f(-1)f(1) \le 0$

$$(1-5-(a+1))(1+5-(a+1)) \le 0$$

$$(a-5)(a+5) \le 0$$

$$-5 \le a \le 5$$

$$D = 5^2 + 4(a+1) = 4a + 26 \ge 0. a \ge -6.5$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{4a+26}}{2} \qquad \cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{4a+26}}{2}$$

$$x = \pm\arccos\left(\frac{-5 \pm \sqrt{4a+26}}{2}\right) + 2\pi\kappa$$

Жауабы: $|a| > 5$ болса шешімі жоқ.

$|a| \le 5$ болса $x = \pm\arccos\left(\frac{-5 \pm \sqrt{4a+26}}{2}\right) + 2\pi\kappa$

3) 2cos3x+4cos5x=$a^2$-4a+5

Параболаны зерттейміз: f(a)=$a^2$-4a+5

D=16-40=-24<0-парабола үнемі оң сан болуы керек.

Параболаның төбесі: $a_0 = -\frac{-4}{2} = 2. f(a) = 4 - 8 + 10 = 6$

Функцияның ең кіші мәні: $f_{\min} = f(2) = 6$

2cos3x+4cos5x қосындысы үшін 6 саны ең үлкен болып табылады.

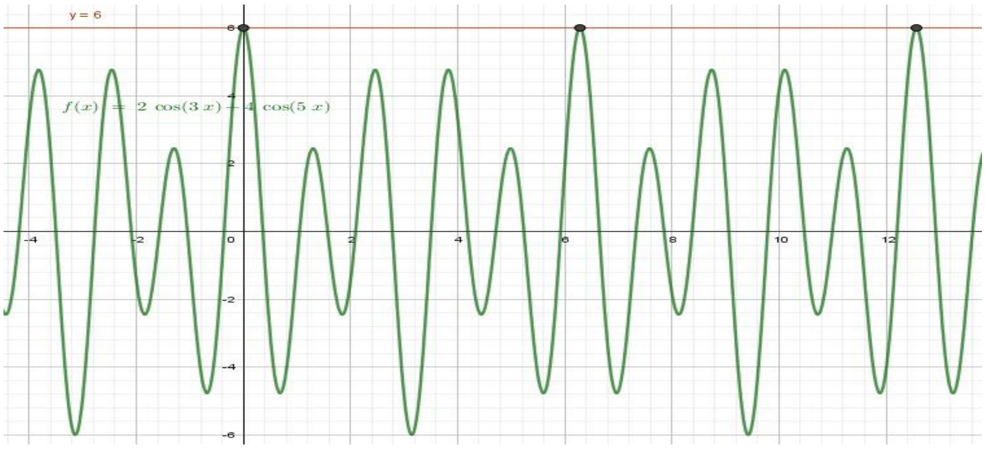
$$\begin{cases} 2\cos 3x + 4\cos 5x = 6 \\ a^2 - 4a + 10 = 6 \end{cases}$$

екінші теңдеуді шешкенде a=2

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}\pi\kappa \\ x = \frac{2}{5}\pi n \end{cases}$$

cos3x+2cos5x=3 $\begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos 5x = 1 \end{cases} \begin{cases} 3x = 2\pi\kappa \\ 5x = 2\pi n \end{cases}$

$\frac{2}{3}\pi\kappa = \frac{2}{5}\pi n$ $\frac{\kappa}{3} = \frac{n}{5}$ k=3m. $m \in Z$ $x = \frac{2}{3}\pi * 3m = 2\pi m$




Сызбада косинустардың қосындысы әрқайсысы бойынша максималды мәнге 6 жететінін көруге болады 2 $\pi$ яғни толық айналым.

Жауабы: $a \neq 2$ болғанда шешімі жоқ. a=2 болса, $x = 2\pi\kappa$

4) asin$^2$x+cos$^2$x=0

a(1-cos$^2$x)+cosx=0

a-acos$^2$x+cosx=0

t=cosx

at$^2$-t-a=0

a=0 болғанда cosx=0 $x = \frac{\pi}{2} + \pi\kappa$

$$a \neq 0 . D = 1 + 4a^2 . t_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2a}$$

$$|t_2| = \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2|a|} > \frac{1+2|a|}{2|a|} > 1$$

- бұл түбір шешімі бола алмайды

$$|t_1| = \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a} = \frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2|a|}$$

$$\sqrt{1+4a^2} - 1 \leq 2|a|$$

$$\sqrt{1+4a^2 \le 2|a|}+1$$

$$1+4a^2 \le 4a^2+4|a|+1$$

$$\cos x = \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a}$$

$$x = \pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a}\right)+2\pi\kappa$$

$$x = \frac{\pi}{2}+\pi\kappa$$

Жауабы: а = 0. $a \ne 0$.

Орындалған жұмыс пен зерттелген материалдардың негізінде қорытынды жасауға болады: Тригонометриялық теңдеулер тригонометрия бөлімінде ерекше орын алады. Теңдеулер көбінесе нақты жағдайлардың математикалық модельдері болып табылады, астрономияда, теңіз және әуе навигациясында, музыка теориясында, акустикада, оптикада, қаржы нарықтарын талдауда, электроникада, ықтималдық теориясында, статистикада, биологияда және т.б. Сондықтан тригонометриялық теңдеулерді шешудің әртүрлі әдістері мен тәсілдерін білу маңызды.

Қазіргі математика сабағында оқушыларды параметрлері бар тригонометриялық теңдеулер мен теңдеулер жүйесін шешуге үйретуде әртүрлі әдістер мен тәсілдер қолданылады. Әр әдіс оқушылардың түрлі дағдыларын дамытуға бағытталған. Оқушыларды тиімді оқыту үшін графикалық әдістерді, алгебралық түрлендірулерді, параметрлік талдау мен математикалық бағдарламаларды қолдану өте маңызды. Осы әдістерді үйлестіре отырып, оқушылардың математикалық білімін тереңдетуге және олардың аналитикалық ойлау қабілетін дамытуға болады.

**Қолданылған әдебиеттер тізімі:**

1. Витохина, Н.Н. Тригонометриялық теңдеулердің түрлері және оларды шешу жолдары / Н. Н. Витохина, М. М. Черняк – 2019. – № 6(22). – 110-118 ББ

2. Деревянко, А. Е. 10-сынып оқушыларын қарапайым тригонометрияны шешуге үйретудің әдістемелік тәсілдері теңдеулер / А. Е. Деревянко, А. ю. Дрок, в.п. Кузнецова // қазіргі білім берудің өзекті мәселелері. – 2021. – № 2(31). – 296-303 ББ

3. Мордкович А. Г. алгебра және Математикалық талдаудың басталуы. 10 сынып - Мәскеу: Мнемозина, 2020.
4. МЕН ЕМТИХАНДЫ ШЕШЕМІН. Профиль деңгейіндегі Математика [Интернетте]. - https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=167.

5. Шабунин М. И. алгебра және Математикалық талдаудың басталуы. Дидактикалық материалдар. 10 сынып [кітап]. - Мәскеу: Ағарту, 2012.
6. А.Е.Әбілкасымова, Р.В.Кудакова, Г.А.Мәлкеева. «Математика». Атамұра - Алматы, 2018ж
7. Қ.Қаңлыбаев, К.Әбдімәжитова, Ш.Бекбаулиев. «Тригонометриялық функциялар және олардың теңдеулері мен теңсіздіктері». Республикалық баспа – Алматы, 2015ж.
8. ҰБТ жинағы -2020-2024 оқу жылдары.